

特集：パソコン・グラフィックスを
医療で活用する

歯科矯正での図形処理 確率楕円の面積を求める

小熊歯科医院

小熊 清史

特集：パソコン・グラフィックスを
医療で活用する

歯科矯正での図形処理 確率楕円の面積を求める

小熊歯科医院

小熊 清史

はじめに

歯科矯正学の分野では側面頭部X線規格写真（セファログラム）の分析がルーチンワークとして広く用いられている。側面頭部X線写真が最初に撮影されたのは1922年（Pacini and Carrera）で、その後1931年に規格撮影の工夫がなされ（Hofrath and Broadbent）、1930年代に歯科矯正学に導入されはじめた。広く普及しだしたのは過去20～30年間のことであるが、同時に多くの研究者によって、いろいろな分析法が発表され、その数は100をこえるともいわれている¹⁾。

いずれにしても、X線写真上で特定の計測点を読取り、計測点間の距離・角度などを求めて分析を行う。計測点は形態学的に重要なだけでなく、X線写真上で明瞭に写ることが条件となる。

しかしながら、実際には計測にあたって、種々の誤差が入り込む。撮影条件を変えれば当然影響が出てくるが、同一のフィルムから同一人が読み取る場合でも一定のばらつきがあり、各計測点によって特徴のある分散型を示す。

近年、X線セログラフィやデジタル画像処理（computed radiography：以下CR）などの新しい撮影方法が開発され、一見して明瞭に写ってい

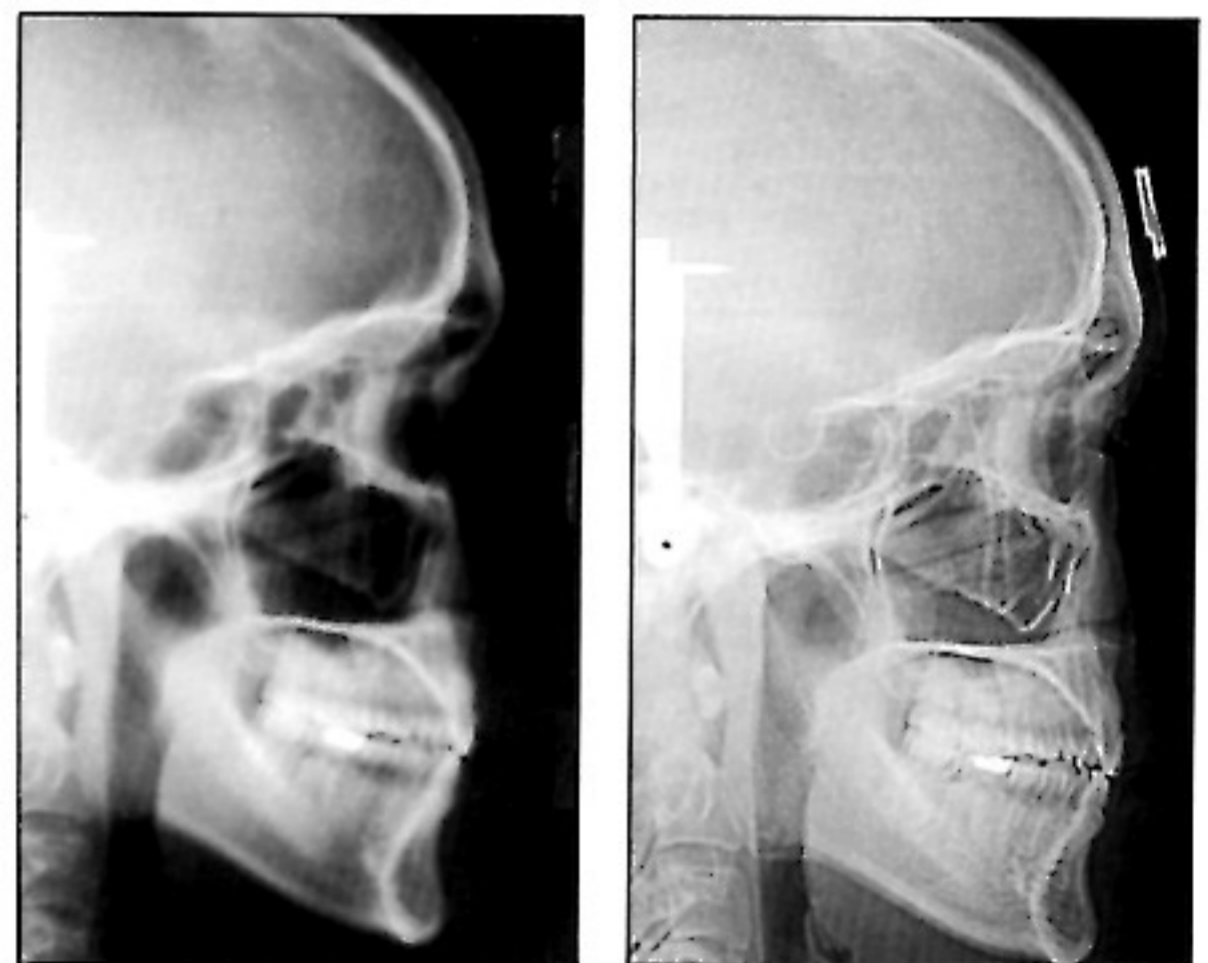


写真1 左側 従来のセファログラム
右側 CR

るので、計測誤差も少ないような印象を与えるが、計測点によっては、かえって判別が困難なものもある（写真1）。

金沢医科大学矯正歯科学教室では従来型のscreen-film方式とCRのセファログラムにおける計測点設定誤差の研究を行った²⁾が、そのデータ処理の一環として、2次元データの分布から等確率楕円を描き、その面積を求める必要が生じ、PC-9801を用い、BASICにてプログラムを作製した³⁾⁴⁾。

以下にその要点を紹介する。

特集：パソコン・グラフィックスを 医療で活用する



楕円を描く



中心が原点に一致し、かつ傾きがXY軸に一致する基本的な楕円は次の式であらわされる。

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

これをディスプレイ上にプロットするには、極座標を用いて、

$$x = V \cdot \cos\theta \quad y = V \cdot \sin\theta$$

とおき、 θ を0から 2π まで変化させればよい。

座標値は式①となる（サンプルリスト1）。

$$\text{式①} \quad V = \sqrt{1/(\cos^2\theta/a^2 + \sin^2\theta/b^2)}$$

$$X = V \cdot \cos\theta$$

$$Y = V \cdot \sin\theta$$

サンプルリスト1

```
1000 ////////////////////////////////////////////////// sample list 1 //////////////////////////////////////////////////
1010 CLEAR:SCREEN 3.0.0.1:CLS 3
1100 WINDOW (-320,-200)-(320,200)
1110 LINE (-200,0)-(200,0):LINE (0,-200)-(0,200)
1120 A=10: B=5
1130 FOR P=0 TO 2*3.2 STEP .05
1140   V=SQR(1/(COS(P)^2/A^2+SIN(P)^2/B^2))
1150   X=V*COS(P)*10:Y=V*SIN(P)*10
1160   IF P=0 THEN PSET (X,-Y) ELSE LINE -(X,-Y)
1170 NEXT P
1190 ///////////////////////////////////////////////////1987.10 K.OGUSA
```



確率楕円を描く



2次元データが正規分布するとき、等確率楕円は式②であらわされる。⁵⁾

式②

$$C^2 = \frac{1}{1-r^2} \left[\frac{(x-x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-x)(y-y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-y)^2}{\sigma_y^2} \right]$$

r : correlation coefficient

σ_x, σ_y : standard deviation

x, y : means

C : constant

式③

$$p = 1 - e^{-C^2/2}$$

$$\therefore C^2 = -2\ln(1-p)$$

定数Cと確率Pとの間には式③の関係がある。たとえば、 $p=0.95$ のとき $C=2.448$ となり、この楕円の中にはいる確率が95%であることを示し、95%棄却楕円ともいう。

確率楕円を描くのは、前項と同じように極座標

におきかえて考えればよいが、もとの式が複雑なだけに、座標値を求める式も複雑になる（式④）。

式④

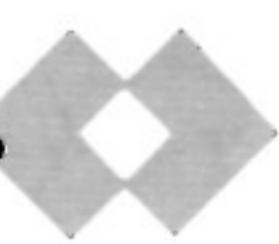
$$V = \sqrt{C^2(1-r)^2 / \left(\frac{\cos^2\theta}{\sigma_x^2} - \frac{2r \cdot \cos\theta \sin\theta}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\sin^2\theta}{\sigma_y^2} \right)}$$

$$X = V \cdot \cos\theta$$

$$Y = V \cdot \sin\theta$$



楕円の面積を求める



先に述べた基本的な楕円の面積は $S = \pi ab$ である。

実際には、ある傾きをもった楕円を扱うので、これを

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy = 1$$

（ただし、中心は原点とする）とおいて、傾きをXY軸に一致させるために、角度 θ だけ回転させる。点(x, y)を角度 θ だけ回転したときの座標値(X, Y)は

$$X = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$

$$Y = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

となり、これを代入し、基本楕円の式と合同となることから式⑤、⑥、⑦を得る。

式⑤

$$1/a^2 = \alpha \cos^2\theta + \beta \sin^2\theta + \gamma \cos\theta \sin\theta$$

式⑥

$$1/b^2 = \alpha \sin^2\theta + \beta \cos^2\theta + \gamma \cos\theta \sin\theta$$

式⑦

$$\gamma \cos^2\theta - \gamma \sin^2\theta + 2\beta \cos\theta \sin\theta - 2\alpha \cos\theta \sin\theta = 0$$

式⑧ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos 2\theta$

$$\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta$$

$$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$$

式⑨

$$\tan 2\theta = (\alpha - \beta) / \gamma$$

$$\theta = \frac{1}{2} \text{atan} \left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma} \right)$$

さらに、三角関数の公式⑧を用いて式⑦を解くと角度 θ が求められる（式⑨）。この θ の値を式⑤、⑥に代入すれば、a, bの値も得られるので、 $S = \pi ab$ より面積を求めることができる。

確率楕円の面積を求める

確率楕円の面積は前項に準じて式②を変形し、 $\alpha\beta\gamma$ に代入すればよい。(式⑩)

式⑩

$$\theta = \frac{1}{2} \text{atan} \left(\frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right)$$

$$1/a^2 = \frac{1}{C^2(1-r^2)} \left(\frac{\cos^2\theta}{\sigma_x^2} - \frac{2r \cdot \cos\theta\sin\theta}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\sin^2\theta}{\sigma_y^2} \right)$$

$$1/b^2 = \frac{1}{C^2(1-r^2)} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sigma_x^2} - \frac{2r \cdot \cos\theta\sin\theta}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\cos^2\theta}{\sigma_y^2} \right)$$

ただし、あらかじめ $X = x - \bar{x}$ $Y = y - \bar{y}$ として、楕円の中心を原点に移動して考える。

式は多少複雑だが、そこはコンピュータのありがたところで、瞬時に計算してくれる(サンプルリスト2)。

サンプルリスト2

```

1000 ***** sample list 2 *****
1010 CLEAR:CONSOLE 0.25,0.0:SCREEN 3.0,0.1:CLS 3
1100 WINDOW (-320,-200)-(320,200)
1110 LINE (-200,0)-(200,0):LINE (0,-200)-(0,200)
1120 ***** Initial data *****
1130 P$="95%"          *probability
1140 P=VAL(P$)/100:CC=(1-2)*LOG(1-P)
1150 DS=.05           *stepping for drawing
1160 RG=20           *range
1170 ***** data input *****
1180 RESTORE 1500
#190 N=0:SX=0:SY=0:SXY=0:VX=0:VY=0
1200 READ X$,Y$:X=VAL(X$):Y=VAL(Y$)
1210 IF X$="" THEN 1260
1220 N=N+1
1230 SX=SX+X:SY=SY+Y:SXY=SXY+X*Y
1240 VX=VX+X*X:VY=VY+Y*Y
1245 X=X*200/RG:Y=Y*200/RG
1246 LINE (X+1,-Y+1)-(X-1,-Y-1)..B
1250 GOTO 1200
1260 ***** data processing *****
1270 IX=SX/N:IY=SY/N
1280 SDX=SQR((VX-SX*SX/N)/(N-1))
1290 SDY=SQR((VY-SY*SY/N)/(N-1))
1300 R=(SXY-SX*SY/N)/(N-1):R=R/(SDX*SDY)
1305 *
1310 TAN.TT=2*R*SDX*SDY/(SDX*SDX-SDY*SDY)
1320 T=(ATN(TAN.TT))/2
1330 A=1/(SDX*SDX):B=1/(SDY*SDY)
1340 H=-R/(SDX*SDY):D=(1-R*R)*CC
1350 AA=A*COS(T)*COS(T)+H*SIN(2*T)+B*SIN(T)*SIN(T)
1360 BB=B*SIN(T)*SIN(T)-H*SIN(2*T)+A*COS(T)*COS(T)
1370 S=3.1415*D/SQR(AA*BB)
1380 *
1390 ***** draw *****
1400 FOR P=0 TO 2*3.2 STEP DS
1410 Q=COS(P)^2/SDX^2-2*R*COS(P)*SIN(P)/(SDX*SDY)+SIN(P)^2/SDY^2
1420 V=SQR(CC*(1-R^2)/Q)
1430 X=V*COS(P)+IX:Y=V*SIN(P)+IY
1440 X=X*200/RG:Y=Y*200/RG
1450 IF P=0 THEN PSET(X,-Y) ELSE LINE -(X,-Y)
1455 NEXT P
1456 LOCATE 60,17:PRINT "p=":P$
1460 LOCATE 60,18:PRINT "s=":S
1470 END
1480 *
1490 ***** data *****
1500 DATA 3.5,10.8, 4.5,12.4, 3.8,9.4, 5.2,10.3, 6.3,12.1
1510 DATA 2.3,8.6, 4.4,15.9, 7.1,15.0, 4.1,10.3, 5.1,10.3
1515 DATA 1.1,8.3, 2.3,8.6, 5.9,7.8, 4.6,6.7, 6.9,8.3
1520 DATA *.*
1590 *****/1987.10 K.OGIWA
    
```

応用例1

図1はセファログラム上の計測点設定のばらつきを従来型のX線写真とCRについて比較したものの一部である。^{2),3)}

3名の術者が同一フィルム上で各5回、計15回の計測点設定を行い、デジタイザから入力した座標値をもとに、XYプロッタを用いて出力したものである。

Nとあるのは、鼻骨の上縁に相当する計測点であるが、CRではばらつきがきわめて小さくなっている。

PNSとあるのは、硬口蓋の後縁に相当する計測点であるが、撮影方法によって、特徴のあるずれ方を示している。

また、U6(上顎第1大臼歯)L6(下顎第1大臼歯)では、むしろ従来型のフィルムのほうが、わずかながらばらつきが少なくなっている。

応用例2

図2は、歯科矯正領域でよく用いられるプロフィールプログラムに、確率楕円を組み合わせた例である。

正常咬合者の平均プロフィールプログラム、あるいは、特定の異常パターンと確率楕円とを組み合わせて表現すると、総合的な診断の助けとして、また、患者に対する説明の手段としても有効であろうと思われる。

おわりに

歯科矯正学の領域はセファログラムを診断の手段として比較的早くから用いてきたため、大型コンピュータあるいはミニコン・オフコンの時代からコンピュータ処理が試みられてきた⁶⁾。パソコンが普及した現在では、パソコン用ソフトも多数市販されている。

今回、確率楕円の応用について発表したのが、プログラム自体はごく単純なものなので、歯科矯正

特集：パソコン・グラフィックスを 医療で活用する

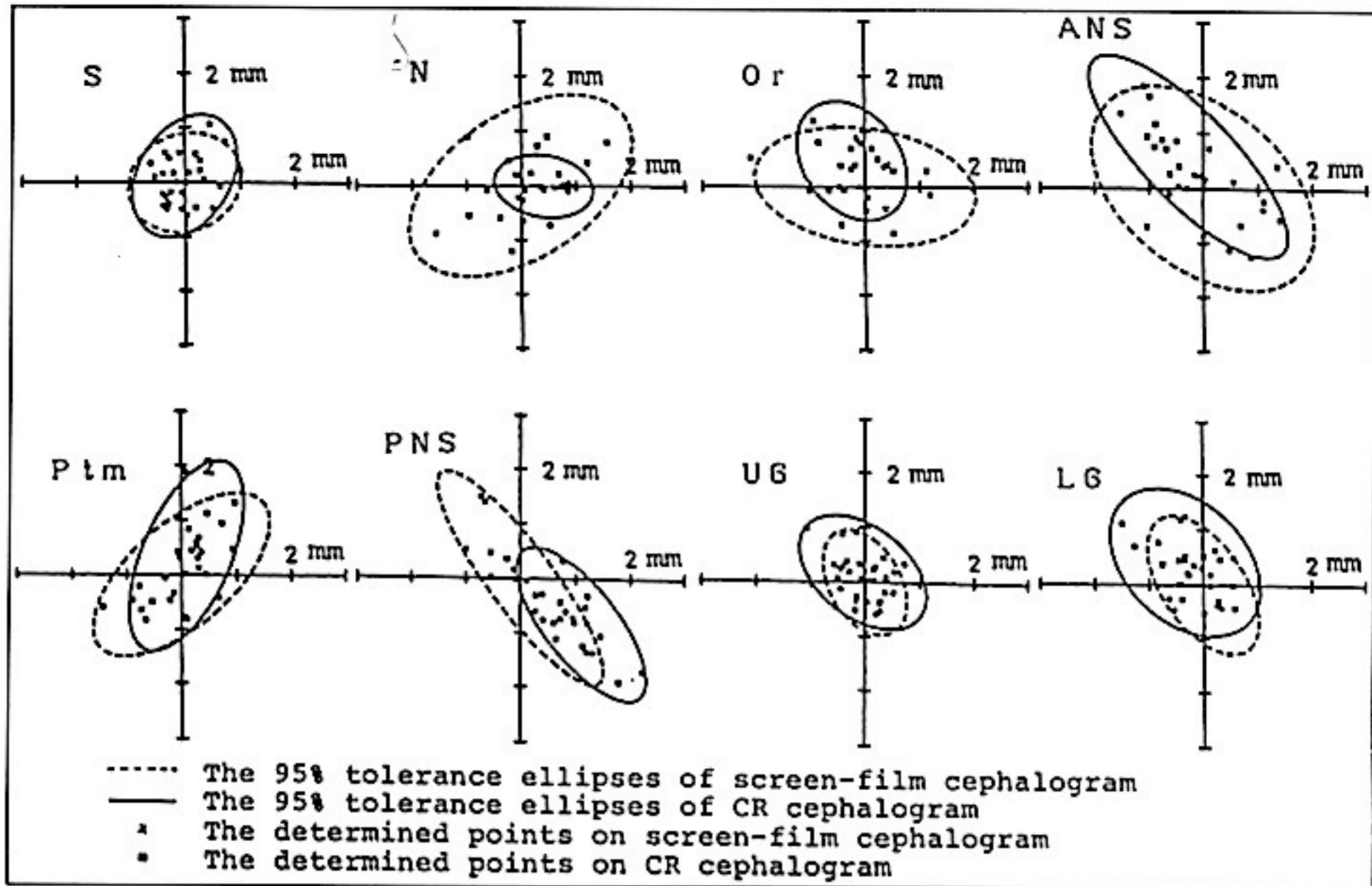
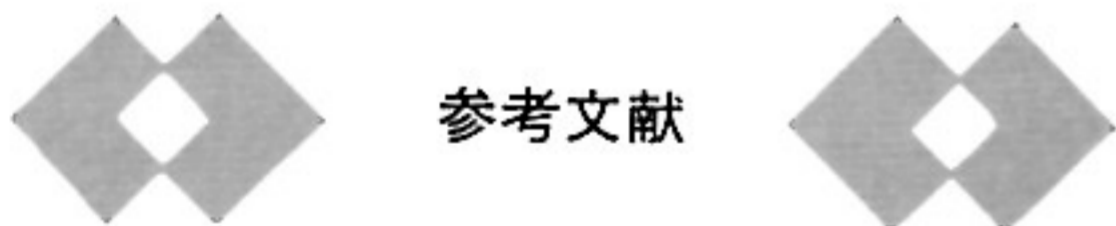


図1 セファログラム上での計測点設定誤差

学以外の分野でも、2次元データを扱う際に利用していただければ幸いです。

なお、本稿をまとめるにあたって金沢医科大学矯正歯科学教室、須佐美隆三教授・香林正治先生をはじめ教室員の方々にご協力をいただきました。ここに厚く謝意を表します。



参考文献

- 1) Rakosi.T : Cephalometric Radiography. London.1982.Wolfe Medical Pub.,7.
- 2) 香林正治, 小熊清史, ほか : Computed Radiography の側方頭部X線規格写真への応用について, 日矯歯誌, 44, 217~229, 1985.
- 3) 香林正治, 小熊清史, ほか : レントゲン画像の一臨床的評価法, 金沢医大誌, 10 : 135~142. 1985.
- 4) 小熊清史 : 確率楕円を描き, その面積を求める, メディカル・マイコン・レポート, 7 (7), 45~51, 1986.
- 5) Burington.R.S.and May.D.C. : A handbook of probability and statics with tables (林知己夫, 脇本和昌監訳 確率・統計ハンドブック), 東京, 1975, 森北出版, 119~139.

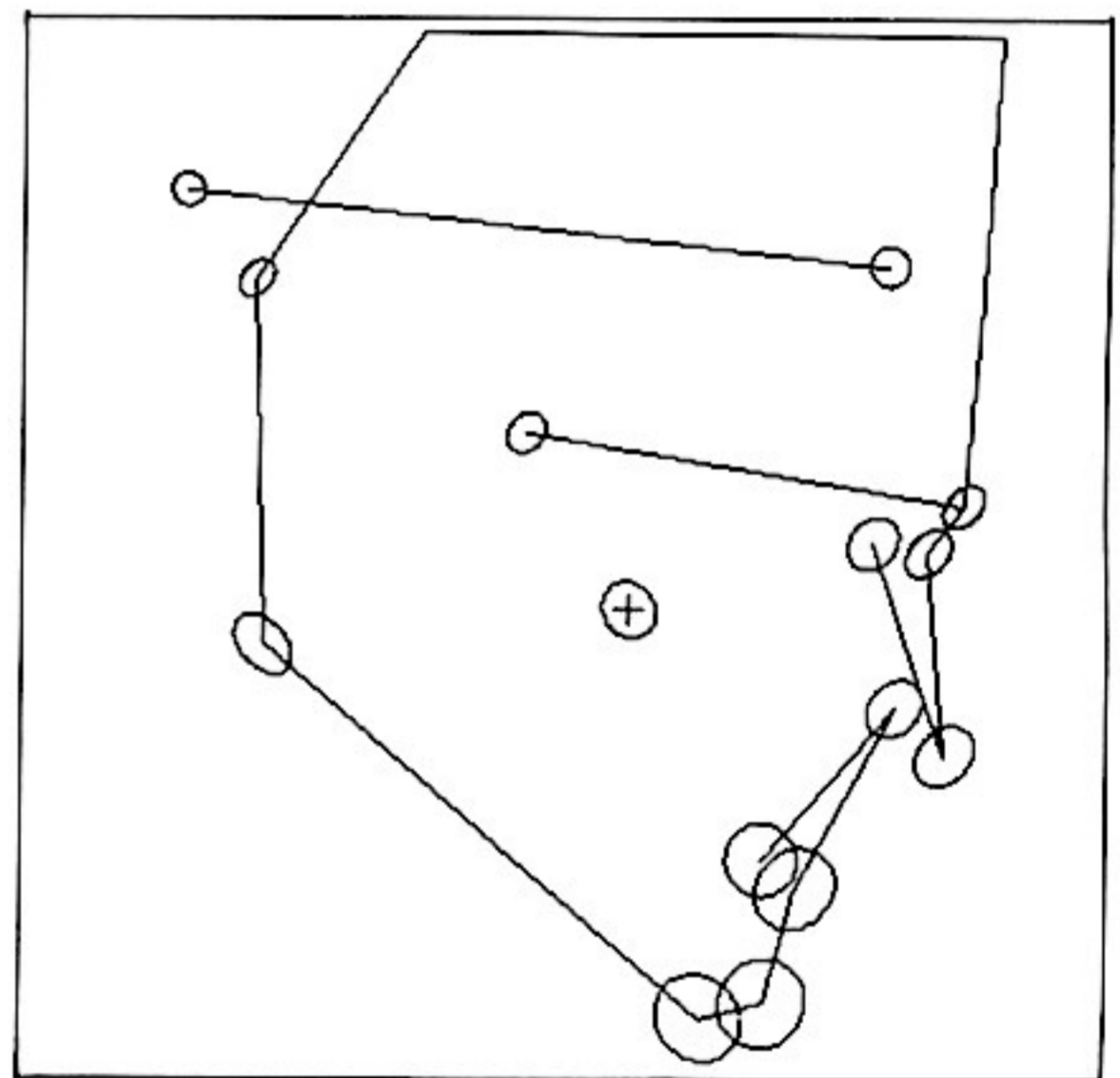


図2 平均プロフィールグラムと確率楕円

- 6) 和田清聡, ほか : 頭部X線規格側面写真による症例分析法の検討, 金沢医大誌, 6 : 60~70, 1981.